Énoncé TD - MF3

Exercices à maîtriser

Ex. n°1 • Dimensionnement d'une pompe ★☆☆ 7683

On dispose d'une cuve souterraine enterrée à une profondeur $h = 30$ m et d'une pompe permettant d'acheminer l'eau à la surface avec un débit $D_m = 0{,}5\ \mathrm{kg \cdot s^{-1}}$ au travers d'une conduite de rayon R constant. La sortie S est à la pression atmosphérique P_0, l'entrée E à la pression $P_{\mathrm{E}} = 1,5P_0$.

Déterminer la puissance de la pompe.

Ex. n°2 • Débitmètre de Venturi ★⯪☆ 1417

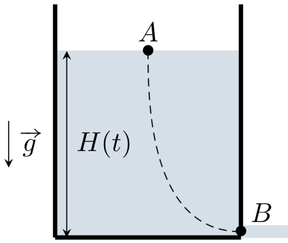
Un débitmètre de Venturi est un dispositif qui permet de mesurer le débit d'un écoulement permanent incompressible dans une conduite. Il s'agit d'imposer un rétrécissement de section et de mesurer grâce à un manomètre différentiel la différence de pression entre deux prises de pression placées en amont et au cœur du resserrement de section.

1) Comment évolue la vitesse débitante entre les deux sections S_1 et S_2 où sont placées les prises de pression ? En déduire le signe de $\Delta P = P_1 - P_2$.

2) Exprimer le débit massique dans la conduite en fonction de ρ, ΔP et des sections.

Ex. n°3 • Formule de Toricelli ★⯪☆ 7377

Soit un réservoir cylindrique de section S, initialement rempli d'eau avec une hauteur H_0. On perce au point B, au fond de ce réservoir, un orifice de section $s \ll S$, par lequel il se vide. On suppose étudier la vidange dans une approximation de régime quasi-stationnaire.



1) Montrer que $v_{\mathrm{B}} \gg v_{\mathrm{A}}$.

2) Montrer que le débit massique sortant du cylindre s'exprime par $D_m = \rho s\sqrt{2gH(t)}$. Cette relation est appelée « relation de Torricelli ».

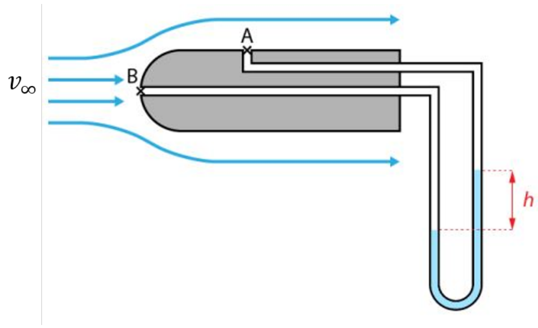
3) Montrer que la hauteur d'eau vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{dH}{dt} = -\alpha\sqrt{2gH} \quad \text{avec :} \quad \alpha = \frac{s}{S}$$

4) En déduire la durée Δt nécessaire pour vider intégralement le réservoir.

Ex. n°4 • Tube de Pitot ★⯪☆ 3038

On considère le dispositif suivant, un tube de Pitot, qui se place par exemple sur l'extérieur des avions pour mesurer leur vitesse.

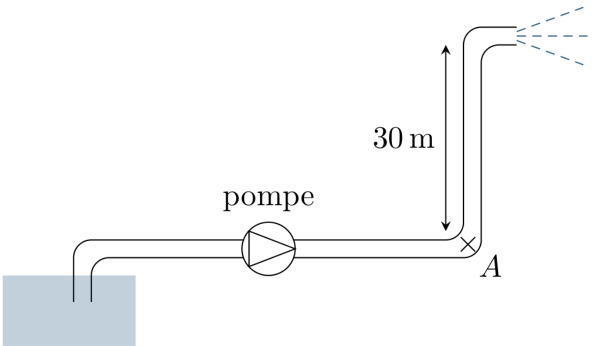


Le tube est considéré fixe dans le référentiel d'étude et c'est l'air qui est en mouvement. On appelle v_∞ la vitesse du fluide loin du tube. Le fluide supposé parfait, incompressible et homogène (masse volumique ρ_0), et l'écoulement est supposé parfait.

Dans le tube en U se trouve un liquide incompressible de masse volumique $\rho_1 \gg \rho_0$. Il et relié à l'écoulement par les point A et B. Le tube étant de faible dimension, il perturbe peu l'écoulement et on pourra considérer que $v_{\mathrm{A}} \simeq v_\infty$.

Exprimer v_∞ en fonction de g, h, ρ_0 et ρ_1.

Ex. n°5 • Lance incendie ★★☆ 2646



On considère un tuyau de pompier de diamètre $d = 70$ mm, montant à une hauteur de $h = 30$ m, où il se termine par une lance. Une pompe impose un débit massique $D_m = 500\ \mathrm{kg \cdot min^{-1}}$, l'eau étant aspirée à partir d'un bassin à l'air libre.

L'eau est supposée incompressible, et l'écoulement homogène, parfait et stationnaire.

<u>Donnée</u> : masse volumique de l'eau $\rho = 1{,}0 \times 10^3\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$

1) Quelle est la vitesse v de l'écoulement dans le tuyau ?

2) L'eau sort de la lance avec une vitesse d'éjection $v_e = 30\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Comment l'expliquer ?

3) Quelle doit être la pression au point A pour obtenir une telle vitesse en sortie de la lance ?

On s'intéresse maintenant aux pertes de charge dans le tuyau, exprimées en $\mathrm{Pa \cdot m^{-1}}$ par :

$$K = \frac{f \rho v^2}{2d} \quad \text{avec :} \quad f = 2{,}0 \times 10^{-2}\ \text{USI}$$

4) Quelle est l'unité de f ?

5) Quelle puissance doit fournir la pompe, sachant que le tuyau est long de $L = 200$ m au total ?

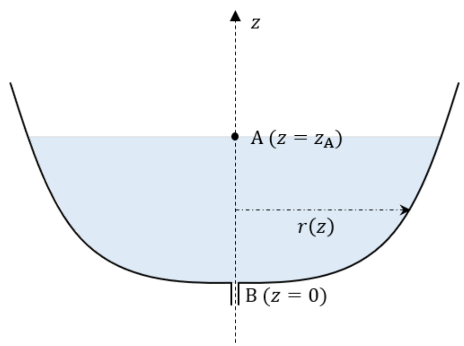
Pour aller plus loin

Ex. n°6 • Clepsydre ★★☆ 5382

Soit un récipient $\mathcal{R}$ à symétrie de révolution autour de l'axe (Oz), où le rayon r à la cote z, comptée à partir de l'orifice B, est donnée par :

$$r(z) = a\ r^n$$

Au point B, le récipient est percé d'un trou de très faible section S_0.



Le réservoir est initialement rempli d'eau de masse volumique ρ. La pression atmosphérique P_0 règne au-dessus de la surface libre de l'eau.

Le récipient se vide au cours du temps. L'écoulement est supposé parfait, stationnaire, incompressible et homogène. On suppose que le récipient est toujours suffisamment rempli pour que la surface libre soit toujours très grande devant la surface de vidange (S_0).

1) Déterminer la relation liant v_B à z_A, connue sous le nom de formule de Torricelli.

2) En déduire l'équation différentielle vérifiée par z_A. On pourra introduire la constante :

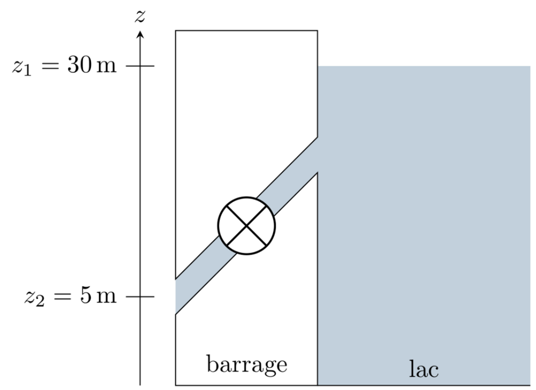
$$K = \frac{S_0 \sqrt{2g}}{\pi a^2}$$

En 2300 avant J.C., les Égyptiens avaient réalisé des récipients appelés clepsydres pour mesurer le temps et pour lesquels la hauteur de la surface libre baisse linéairement dans le temps.

3) Quelle doit être pour cela la valeur de n pour faire une clepsydre ? Que vaut alors la vitesse de la surface libre ?

Ex. n°7 • Production d'énergie hydroélectrique ★★☆ 8524

L'eau d'un lac de retenue d'un barrage s'écoule par une conduite où se trouve une turbine. La conduite a un diamètre de sortie $D = 2{,}5$ m et le débit volumique vaut $D_m = 25\ \mathrm{kg \cdot s^{-1}}$.



1) Donner sans calcul la vitesse à la surface du lac. Calculer la vitesse en sortie de la conduite.

2) Calculer la puissance maximale disponible sur la turbine.

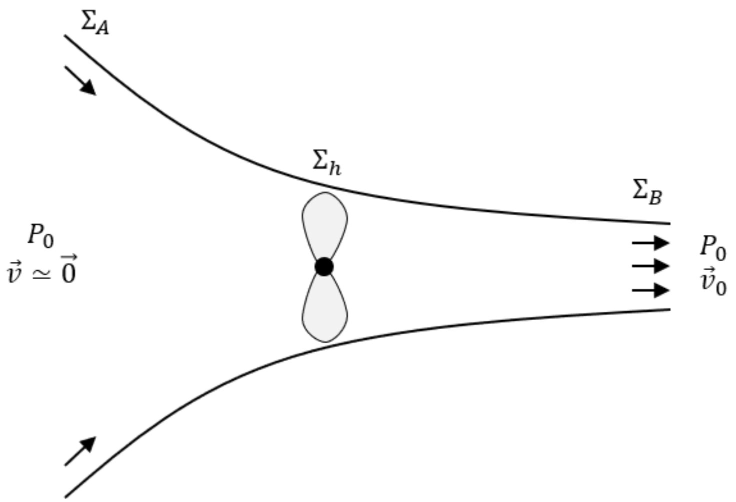
3) Le rendement est en pratique de 60 %, ce qui donne une puissance en sortie de turbine

de $\mathcal{P} = 3{,}5$ MW. Commenter les écarts et quantifier ce phénomène.

Ex. n°8 • Étude d'une soufflerie ★★☆ 2361

Une soufflerie est schématisée selon la figure ci-dessous.

L'air sera supposé incompressible, homogène et parfait, de masse volumique ρ. La pesanteur sera négligée. Le diamètre de sortie de la soufflerie est D_B et l'air y possède une vitesse v_0. Au niveau de l'hélice, le diamètre est D_h. On se place en régime stationnaire.

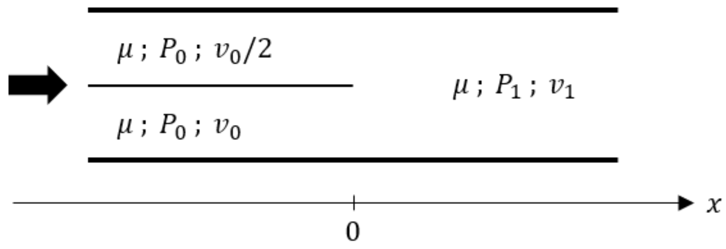


1) Déterminer, en fonction de ρ et v_0, la différence de pression ΔP existant de part et d'autre de l'hélice.

2) Déterminer la puissance utile $\mathcal{P}_u$ fournie par la soufflerie, puis la norme F de la force exercée par le fluide sur l'hélice.

Ex. n°9 • Homogénéisation d'un écoulement ★★⯪ 4954

Une canalisation cylindrique d'axe horizontal x et de section S est partagée jusqu'en $x = 0$ en deux canalisations de section $S/2$ dans lesquelles un même fluide de masse volumique μ s'écoule avec des vitesses uniformes et stationnaires $\overrightarrow{v_0}$ et $\overrightarrow{v_0}/2$. Les deux écoulements se rejoignent en $x = 0$ et suffisamment loin de $x = 0$, l'écoulement est uniforme et stationnaire de vitesse $\overrightarrow{v_1}$. On note P_0 la valeur commune de la pression avant la jonction et P_1 la pression loin après la jonction.



1) Quel phénomène physique est à l'origine de l'homogénéisation des vitesses pour $x > 0$?

2) Établir les expressions de v_1 et P_1 en fonction de v_0, P_0 et μ.

3) Faire un bilan énergétique. Commenter.

Éléments de correction

❶ $\mathcal{P}_u = D_m \times \left[-\dfrac{P_0}{2\rho} + gh\right] = 120$ W **❷** **1)** $v_2 = \dfrac{S_1 v_1}{S_2} > v_1$; $\Delta P > 0$ **2)** $D_m = \sqrt{\dfrac{2\rho\Delta P}{\dfrac{1}{S_2^2} - \dfrac{1}{S_1^2}}}$ **❸** **1)** $v_\mathrm{B} = \dfrac{S v_\mathrm{A}}{s} \gg v_\mathrm{A}$ **2)** $v_\mathrm{B}^2 = 2gH$ **3)** Cf. correction **4)** $\Delta t = \dfrac{1}{\alpha}\sqrt{\dfrac{2H_0}{g}}$ **❹** $v_\infty = \sqrt{\dfrac{2\rho_1 gh}{\rho_0}}$ **❺** **1)** $v = \dfrac{D_m}{\rho\pi r^2} = 2{,}1\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ **2)** Petite surface de sortie **3)** $P_\mathrm{A} = P_\mathrm{atm} + \dfrac{1}{2}\rho\left(v_e^2 - v^2\right) + \rho g h = 7{,}8$ bar **4)** Sans dimension **5)** $\mathcal{P}_u = D_m \times \left[\dfrac{v_\mathrm{e}^2}{2} + gh + \dfrac{KL}{\rho}\right] = 6{,}8$ kW **❻** **1)** $v_\mathrm{B} = \sqrt{2gz_\mathrm{A}}$ **2)** $\dfrac{dz_\mathrm{A}}{dt} + K\ z_\mathrm{A}^{1/2-2n} = 0$ **3)** $n = \dfrac{1}{4}$ **❼** **1)** $v_2 = \dfrac{D_m}{\rho\pi^2} = 5{,}1\ \mathrm{kg\cdot s^{-1}}$ **2)** $\mathcal{P} = D_m \times \left[-\dfrac{v_2^2}{2} + g\left(z_1 - z_2\right)\right] = 5{,}8$ MW **3)** $\Delta z_c = 0{,}4 \times \dfrac{\mathcal{P}}{D_m g} = 9{,}5$ m **❽** **1)** $\Delta P = P_2 - P_1 = \dfrac{1}{2}\rho v_0^2$ **2)** $\mathcal{P}_u = \dfrac{\rho\pi D_B^2 v_0^3}{8}$; $F = \dfrac{\rho\pi D_h^2 v_0^2}{8}$ **❾** **1)** Viscosité **2)** $v_1 = \dfrac{3v_0}{4}$; $P_1 = P_0 + \dfrac{\mu v_0^2}{16}$ **3)** $\mathcal{P} = -\dfrac{9\mu S v_0^3}{128} < 0$